Dossier n°92 : Exemples de problèmes conduisant à la résolution pour u et v entiers relatifs, d'équationsdu type au+bv = k où a, b, k sont des entiers relatifs.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 18 octobre 2003
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

En classe de troisième, on introduit les notions de divisibilité, de nombres premiers entre eux, de PGCD.

L'étude des nombres premiers se poursuit en classe de seconde, notamment avec la décomposition en facteurs premiers d'un entier.

Enfin, en classe de Terminale S, enseignement de spécialité, les élèves approfondissent les notions de divisibilité, de division euclidienne, d'algorithme d'Euclide, de PAGCD, de nombres premiers entre eux et travaillent sur le PPCM, les théorèmes de Bézout et de Gauss ainsi que la résolution des équations diophantiennes.

Je situe donc ce dossier au niveau de la Terminale S, enseignement de spécialité.

II Commentaires généraux.

En classe de troisième, avec l'outil « fonction affine », les élèves apprennent à déterminer graphiquement l'ensemble des solutions réelles d'une équation du type au + bv = k.

En classe de Terminale, on introduit la méthode de résolution suivante pour obtenir l'ensemble des solutions réelles.

On considère l'équation (E) : au + bv = k où a, b, k $\in \mathbb{Z}$.

- Si a ou b est nul, la résolution est triviale.
- On suppose sur a et b sont non nuls. Soit d le PGCD de a et b.
  - au + bv = d $\Leftrightarrow$ a'u + b'v = 1 avec $a' = \frac{a}{d}$, $b' = \frac{b}{d}$ et a', b' premiers entre eux.
  - D'après le théorème de Bézout, il existe un couple (u_0, v_0) tel que $a'u_0 + b'v_0 = 1$. On peut déterminer (u_0, v_0) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
    - L'équation (E) admet des solutions si et seulement si d divise k.
    - Si d divise k alors l'équation (E) est équivalente à (E') : a'u+ b'v = k' où $k' = \frac{k}{d}$.

$(k'u_0 , k'v_0)$ est une solution particulière de (E').
Soit (u,v) une solution de (E'). Alors $a'(u - k'u_0) = b'(k'v_0 - v)$.

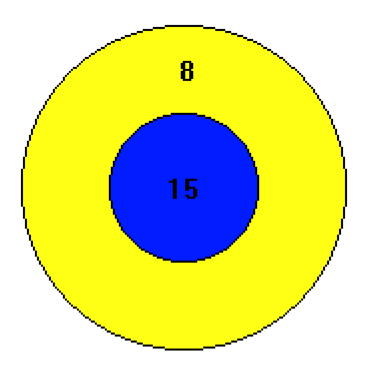
En appliquant le théorème de Gauss, on obtient l'ensemble des solutions de (E) : $\{(k'u_0+b'p, k'v_0 - a'p) / p \in \mathbb{Z}\}$.

Le but de ce dossier est de familiariser les élèves avec cette technique de résolution et de justifier l'apprentissage des mathématiques en faisant le lien avec des problèmes concrets.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.

But : Déterminer le nombre de façons d'obtenir 1000 points avec une telle cible.



Méthode : Résolution de l'équation diophantienne $8x + 15y = 1000$.

Cet exercice a été modifié pour faire le lien avec la résolution dans IR² d'une telle équation, comme elle était faite en troisième.

III.2 Exercice n°2.

But : Déterminer le jour de conjonction de deux corps célestes de période différente.

Méthode : Résolution de l'équation diophantienne $35u – 27v = 2$.

III.3 Exercice n°3.

But : Chiffrer et déchiffrer des mots à l'aide d'une fonction bijective : c'est un exercice de cryptographie.

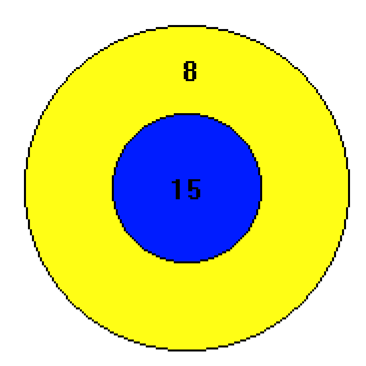
Méthode : Résolution de l'équation diophantienne $17x + 26v = y –22$ (en (x,v)).

Outils : Congruences.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (n°86 p 54, Terracher T^{ale} S 1998).

On souhaite déterminer de combien de façons on peur obtenir un total de 1000 sur la cible ci-dessous.



1. Tracer dans un repère orthogonal la droite d'équation $8x+15y = 1000$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $8x + 15y = 1000$ et représenter ces solutions sur la figure précédente.
3. Répondre au problème posé.

IV.2 Exercice n°2 (n°101 p 361, Terracher T^{ale} S 2002).

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard, il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux corps aux yeux de l'astronome.

Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple (u,v) est solution de l'équation (E_1) : $34x – 27y = 2$.
2. a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (x_0,y_0) solution particulière de l'équation (E_2) : $35x – 27y = 0$.
   b) En déduire une solution particulière (u_0, v_0) de (E_1).
   c) Déterminer toutes les solutions entières de l'équation (E_1).
   d) Déterminer la solution (u,v) permettant de déterminer J_1.
3. a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1.
   b) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

IV.3 Exercice n°3 (p 348, Terracher 2002 T^{ale}S).

On assimile les lettres de l'alphabet français A, B, …, Z aux nombres 0, 1, …, 25 et on code ces nombres par la fonction de « hachage » :

$$f : \{0 ;1 ;\dots ;25\} \to \{0 ;1 ;\dots ;25\}$$

$x \to f(x)$ qui est le reste de la division euclidienne de $17x + 22$ par 26.

1. Chiffrer et coder le mot « HUIT ».
2. Déterminer l'expression d'une fonction de déchiffrage g de {0 ;1 ;… ;25} dans lui-même telle que $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$.
3. Déchiffrer alors le mot « QWXA ».